Donc $\psi_n$ est dérivable à droite en 0 et par suite $\psi_n$ est dérivable sur $[0,+\infty[ = E'$.

d) Soit $x \in E' = [0,+\infty[$ ; $\psi_n'(x) = \dfrac{1}{\varphi_n'(y)}$ où $y = \psi_n(x)$

$\psi_n'(x) = \dfrac{n}{(1+\tan^2 y)(\tan y)^{\frac{1}{n}-1}}$. Or $y = \psi_n(x) \Leftrightarrow x = \varphi_n(y)$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[n]{\tan y} \Leftrightarrow x^n = \tan y$ d'où $\psi_n'(x) = \dfrac{n}{(1+x^{2n})(x^n)^{\frac{1-n}{n}}} = \dfrac{n x^{n-1}}{1+x^{2n}}$

Conclusion : $\forall x \in [0,+\infty[$, $y = \psi_n'(x)\ \dfrac{n x^{n-1}}{1+x^{2n}}$.

2°/ a)• $x \mapsto 1+\tan^2 x$ est dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$

et en particulier sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$

• $x \mapsto -2\sqrt{\tan x}$ est dérivable sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$

donc N est dérivable sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$

• $\forall x \in ]0,\dfrac{\pi}{2}[$ , $N'(x) = 2\tan x\,(1+\tan^2 x) - \dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{\tan x}}$

$= (1+\tan^2 x)\,(2\tan x - \dfrac{1}{\sqrt{\tan x}})$

$N'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{\tan x}} \Leftrightarrow (\tan x)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (\tan x)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2}$

Or la fonction $g : ]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[ \to ]0,+\infty[$, $x \mapsto \tan x$ est une bijection .

En effet , $g'(x) = 1+\tan^2 x > 0 \Rightarrow g$ est continue et strictement croissante sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$ et par suite le réel $(\dfrac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$ admet un seul antécédent $x_0 \in ]0,\dfrac{\pi}{2}[$ par $g$ .